

Série Géométrique

Def Une suite de la forme $a_n = r^{n-1}$ est appelée suite géométrique

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \\ 0 & \text{si } |r| < 1 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } r \leq -1 \end{cases}$$

Exemples

$0,99^n \rightarrow 0$, $1,01^n \rightarrow +\infty$; $(-1)^n$ diverge

On considère maintenant une nouvelle suite (S_n) , avec le terme générale

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Donc, pour une suite géométrique:

$$S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1}$$

$$\text{Alors, } r S_n = r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} + r^n$$

$$\Rightarrow S_n - r S_n = 1 + r^n$$

$$S_n (1 - r) = 1 + r^{n+1}$$

$$(*) \quad S_n = \frac{1 + r^n}{1 - r} \quad \leftarrow \text{terme générale!}$$

Thm

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } r \geq 1 \\ \frac{1}{1-r} & \text{si } |r| < 1 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } r \leq -1 \end{cases}$$

Preuve. Si $r \geq 1$:

$$S_n = 1 + \underbrace{r}_{\geq 1} + \underbrace{r^2}_{\geq 1} + \dots + \underbrace{r^{n-1}}_{\geq 1} \geq 1 + \dots + 1 = n \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow S_n \rightarrow +\infty$$

si $|r| < 1$ ou $r \leq -1$:

le théorème suit de l'équation (*) $\square$

Quand la suite

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

converge vers une limite S , on écrit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S,$$

et on appelle S une **série** (me somme infinie). Donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \quad \text{si } |r| < 1$$

↗ la série géométrique de raison r
série géométrique de raison $-0,7$

Exemples

$$\bullet 1 - 0,7 + 0,7^2 - 0,7^3 + \dots = \frac{1}{1 - (-0,7)} = \frac{10}{17}$$

Si $|r| < 1$, on a pour $a \in \mathbb{R}$,

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots = a(1 + r + r^2 + r^3 + \dots)$$

↗ série géométrique

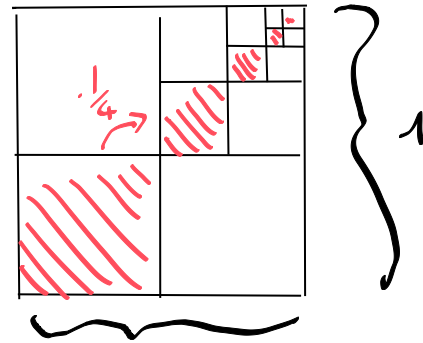
$$= a \left(\frac{1}{1-r} \right) = \frac{a}{1-r}$$

$$\bullet \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \underline{1}$$

Exemple historique : Série d'Arclimède



$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 + \dots \\ &= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots \right) \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}} \end{aligned}$$

Le nombre e

Thm Soit (a_n) une suite.

- (a_n) croissante et majorée $\Rightarrow (a_n)$ converge
- (a_n) décroissante et minorée $\Rightarrow (a_n)$ converge

On peut résumer cela par :

Une suite bornée et monotone converge.

Rem Ce théorème nous donne une manière de savoir qu'une suite converge sans connaître la limite !

C'est une méthode non-constructive.

Rappel : $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots 2 \cdot 1$
et $0! = 1$.

On considère la suite suivante :

$$e_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$
$$= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

Prop La suite (e_n) converge

Comme $e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!}$

la suite (e_n) est croissante. 

Ponc il suffit de montrer qu'elle est majorée.

Has

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$

(Note: Above the terms 1/2!, 1/3!, 1/4!, 1/5! in the sum, there are blue checkmarks and the numbers 1/2, 1/2^2, 1/2^3, 1/2^4 respectively.)

$$\Rightarrow e_n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots \right)$$

$$= 2 + 1 = 3$$

(e_n) est croissante et majorée

$\Rightarrow$ converge vers une limite $e \leq 3!$

le nombre
d'Euler!